Mécanique des fluides

Exercice 1 : surface libre dans un vase en rotation Un vase cylindrique de section circulaire, de rayon R, contient de l'eau sur une hauteur h. On met le vase en rotation autour de son axe à la vitesse angulaire constante ω par rapport au référentiel inertiel du laboratoire. On suppose que le fond du vase ne se découvre pas.

1) Déterminer les surfaces isobares du liquide. En déduire en particulier la forme de la surface du liquide.
2) Quelle est la différence de hauteur d entre le point le plus élevé et le point le plus bas de la surface du liquide ?
3) Calculer l'abaissement Δh de la surface du liquide au centre, ainsi que l'élévation $(\Delta h)'$ de la surface du liquide au niveau des parois du vase, par rapport à la position d'équilibre. A. N. : $R = 10\,\mathrm{cm}$, $\Delta h = 2\,\mathrm{cm}$, $g = 9.81\,\mathrm{m.s^{-2}}$; calculer la vitesse de rotation du vase en tours par minutes.
4) Quelle est la vitesse de rotation ω pour laquelle le fond du vase se découvre ?

Exercice 2 Un réservoir contenant de l'eau glisse sur un plan incliné sous l'action de son poids. L'angle du plan avec l'horizontale est α. Trouver l'angle entre la surface de l'eau et l'horizontale si le coefficient de frottement entre le réservoir et le plan incliné est f. Commenter sur le cas $f = 0$.

Exercice 3 Sur les deux plateaux d'une balance se trouvent deux vases identiques reliés entre eux par un tube souple en U. On y verse de l'eau et on s'assure que l'équilibre de la balance est réalisée. Puis on dépose dans l'un des vases un objet qui y flotte. De quel côté penche la balance lorsqu'elle s'immobilise ?

Exercice 4 : modèle de barrage On considère un barrage assimilé à un parallélépipède droit homogène de masse volumique ρ, de hauteur h, d'épaisseur d. Le long de la face horizontale sur laquelle le barrage repose sur le sol, on suppose que la force exercée par le sol sur le barrage par unité de surface a une composante verticale de la forme $E(x) = A + Bx$, où x est une coordonnée horizontale associée à un axe perpendiculaire au barrage. On pourra supposer que $x = 0$ pour le côté du barrage qui n'est pas en contact avec l'eau, et que $x = d$ pour le côté qui est en contact avec l'eau. On suppose que le barrage est rempli, c'est-à-dire que la hauteur de l'eau qu'il retient est h.

1) En exprimant les conditions d'équilibre du barrage, exprimer les constantes A et B en fonctions de la densité volumique de masse μ de l'eau, ρ, g, h et d.
2) En quel point de la base E est-il minimal ? Pour quelle raison est-il souhaitable que E soit partout positif ?
3) Déduire de ce qui précède la valeur minimale de l'épaisseur qu'il convient de donner au barrage.

Exercice 5 : formule d'Euler On considère un écoulement permanent unidirectionnel selon une direction $\vec{u}_x$. La vitesse du fluide est parallèle à $\vec{u}_x$ et ne dépend que de x, $\vec{v} = v(x)\vec{u}_x$. De même, la masse volumique $\mu(x)$ du fluide ne dépend que de x. On note $S(x)$ l'aire de la section du fluide perpendiculairement à l'axe des x (par exemple, on a affaire à un écoulement dans un tuyau de section variable).

1) Montrer que la loi de conservation de la masse implique que $D = \mu(x)S(x)v(x)$ ne dépend pas de x. On appelle D le débit massique. Noter l'analogie avec l'intensité du courant électrique circulant dans un fil électrique.
2) Montrer que la force totale qui s'exerce sur la portion de fluide comprise entre x_1 et $x_2 > x_1$ est $\vec{f} = D\big(\vec{v}(x_2) - \vec{v}(x_1)\big)$ (c'est la formule d'Euler).

Exercice 6 : vidange d'un réservoir Un réservoir cylindrique vertical, de section horizontale S, est rempli d'eau sur une hauteur h. À $t = 0$, on perce un trou d'aire s dans le fond du cylindre, ce qui entraîne sa vidange. En supposant qu'à chaque instant la vidange peut être assimilée à un régime permanent, calculer la hauteur d'eau $h(t)$ en fonction du temps et le temps T nécessaire à la vidange totale du réservoir. Comparer T au temps de vidange fictif T_0 que l'on obtiendrait en supposant que le débit reste constamment égal au débit initial. A.N. : calculer T pour $S = 1\,\mathrm{m}^2$, $s = 2\,\mathrm{cm}^2$ et $h = 80\,\mathrm{cm}$.

Exercice 7 : principe du siphon Un siphon permet l'écoulement de l'eau d'un réservoir de grandes dimensions. Il est constitué par un tuyau de section S qui est plongé dans le réservoir, s'élève au-dessus de la surface de l'eau d'une hauteur H afin de pouvoir sortir du réservoir, puis pend verticalement. Son orifice de sortie est situé à une hauteur h en dessous de la surface de l'eau dans le réservoir. Quelle est le débit du dispositif en fonction de h ? Montrer que ce débit ne peut excéder une valeur que l'on calculera, si on veut éviter la formation de bulle d'air (phénomène de cavitation) dans le tuyau.

Exercice 8 : équilibre d'un récipient en vidange Soit un récipient de grandes dimensions percé d'un orifice d'aire s par où s'échappe un jet horizontal. Calculer la force qu'il faut lui appliquer pour le maintenir immobile. On notera h la hauteur entre la surface de l'eau dans le récipient et l'orifice.

Exercice 9 : modèle d'une tornade Une tornade est assimilée à un écoulement permanent et incompressible, l'air étant considérée comme un fluide parfait ($\mu = 1.3\,\mathrm{kg/m^3}$). Cet écoulement est caractérisé par un vecteur tourbillon $\vec{\Omega} = \Omega\,\vec{u}_z$ supposé uniforme à l'intérieur d'un cylindre ("œil de la tornade"), d'axe Oz, de rayon $a = 50\,\mathrm{m}$, et nul à l'extérieur. À la périphérie de l'œil, la vitesse a pour module $u = 180\,\mathrm{km/h}$.

1) Exprimer la vitesse $v(\rho)$ à une distance ρ de l'axe en fonction de ρ et u. Représenter $v(\rho)$. Montrer en particulier que pour $\rho > a$, la tornade est équivalente à un vortex dont on calculera l'intensité C.
2) Calculer Ω.
3) Sachant que la pression loin de la tornade est P_0, calculer $P(\rho)$ pour $\rho > a$. Calculer la valeur maximale de la dépression $\Delta P = P_0 - P$ dans la tornade. Application numérique ? Un toit horizontal de masse par unité de surface de $100\,\mathrm{kg/m^2}$ vous paraît-il en danger ?

Exercice 10 : le paradoxe de d'Alembert et l'effet Magnus Un vent de vitesse uniforme à l'infini $\vec{v}_0 = v_0\vec{u}_x$, $v_0 > 0$, souffle horizontalement sur un cylindre vertical de rayon a. On suppose que le fluide est parfait, incompressible et que l'écoulement est irrotationnel. On utilisera un système de coordonnées cylindriques centrées sur le cylindre.

1) a) Montrer qu'il existe un potentiel ϕ tel que $v_i = \partial_i\phi$. Écrire les équations et les conditions aux limites qui permettent de déterminer de manière unique le champ des vitesse $\vec{v}$ et la pression P au sein du fluide.
   b) En cherchant la solution sous la forme $\phi(\rho,\theta) = (A/\rho + B\rho)\cos\theta$, trouver $\vec{v}$ et P partout dans le fluide.
   c) Dessiner (qualitativement) les lignes du champ des vitesses.
   d) Calculer la force qui s'exerce sur le cylindre. Le résultat constitue le "paradoxe de l'Alembert." Commentaires ?

2) Le cylindre tourne à présent autour de son axe à la vitesse angulaire ω. On doit alors rajouter un vortex $\vec{v}' = \frac{\omega a^2}{\rho} \vec{u}_\theta$ au champ de vitesse précédent.

a) En utilisant les résultats de l'exercice 9, montrer que le nouveau champ des vitesses satisfait à toutes les équations et conditions aux limites voulues.

b) Dessiner (qualitativement) les lignes du champ des vitesses. On pourra commencer par trouver les points de vitesse nulle. On pourra distinguer plusieurs cas en fonction de la valeur du paramètre $\alpha = \omega a/(2v_0)$, que l'on supposera positif (le cas $\alpha < 0$ se traitant exactement de la même manière).

c) Calculer la force par unité de longueur subie par le cylindre. Commenter sur les effets de "lift" et de "slice" au tennis ou sur la technique utilisée au golf pour contourner un obstacle.